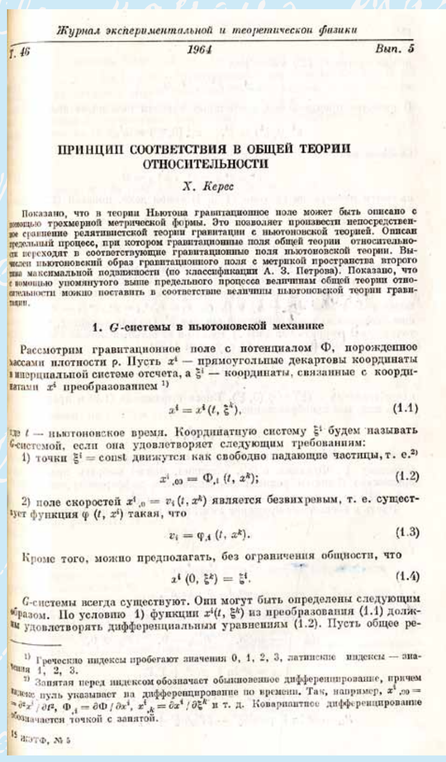
3. Tsentraalsümmeetriline gravitatsioonivälj.

Kui mõte on leidnud paeluva objekti, siis keerleb ta selle ümber ööl kui päeval, püüdes leida juurdepääsu tõele.

Harald Keres

Harald Keres Füüsika Instituudis Riia 142



Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 46 — 1964 — Вып. 5

ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Х. Керес

Показано, что в теории Ньютона гравитационное поле может быть описано с помощью трехмерной метрической формы. Это позволяет произвести непосредственное сравнение релятивистской теории гравитации с ньютоновской теорией. Описан предельный процесс, при котором гравитационные поля общей теории относительности переходят в соответствующие гравитационные поля ньютоновской теории. Вычислен ньютоновский образ гравитационного поля с метрикой пространства второго типа максимальной подвижности (по классификации А. З. Петрова). Показано, что с помощью упомянутого выше предельного процесса величинам общей теории относительности можно поставить в соответствие величины ньютоновской теории гравитации.

1. G-системы в ньютоновской механике

Рассмотрим гравитационное поле с потенциалом Φ, порожденное массами плотности ρ. Пусть x^i — прямоугольные декартовы координаты в инерциальной системе отсчета, а ξ^i — координаты, связанные с координатами x^i преобразованием [1]

$$x^i = x^i(t, \xi^k), \tag{1.1}$$

где t — ньютоновское время. Координатную систему ξ^i будем называть G-системой, если она удовлетворяет следующим требованиям:

1) точки $\xi^i = \text{const}$ движутся как свободно падающие частицы, т. е.[2]

$$x^i{}_{,00} = \Phi_{,i}(t, x^k); \tag{1.2}$$

2) поле скоростей $x^i{}_{,0} = v_i(t, x^k)$ является безвихревым, т. е. существует функция $\varphi(t, x^k)$ такая, что

$$v_i = \varphi_{,A}(t, x^k). \tag{1.3}$$

Кроме того, можно предполагать, без ограничения общности, что

$$x^i(0, \xi^k) = \xi^i. \tag{1.4}$$

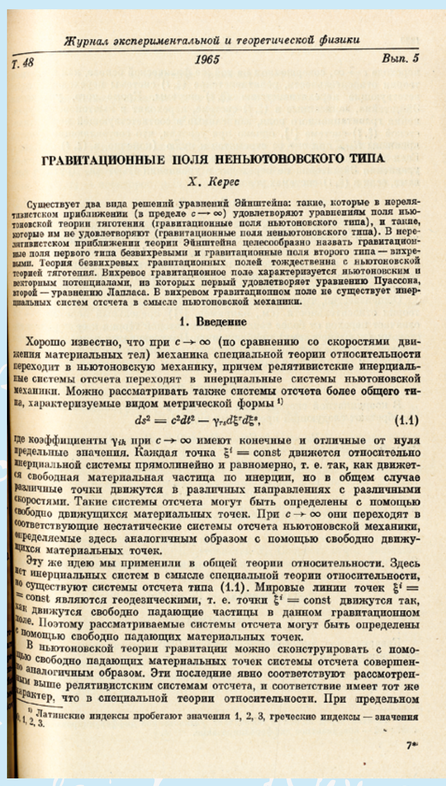
G-системы всегда существуют. Они могут быть определены следующим образом. По условию 1) функции $x^i(t, \xi^k)$ из преобразования (1.1) должны удовлетворять дифференциальным уравнениям (1.2). Пусть общее ре-

[1] Греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, латинские индексы — значения 1, 2, 3.

[2] Занятая перед индексом обозначает обыкновенное дифференцирование, причем индекс нуль указывает на дифференцирование по времени. Так, например, $x^i{}_{,0} = \partial x^i/\partial t$, $\Phi_{,i} = \partial\Phi/\partial x^i$, $x^i{}_{,k} = \partial x^i/\partial \xi^k$ и т. д. Ковариантное дифференцирование обозначается точкой с запятой.

[1] ЖЭТФ, № 5

1964. a. formuleeris Harald Keres matemaatiliselt range piirülemineku Einsteini üldrelatiivsusteooria ja Newtoni gravitatsiooniteooria võrrandite vahel (vastavuse printsiip gravitatsiooniteoorias)



Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 48 — 1965 — Вып. 5

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ НЕНЬЮТОНОВСКОГО ТИПА

Х. Керес

Существует два вида решений уравнений Эйнштейна: такие, которые в нерелятивистском приближении (в пределе $c \to \infty$) удовлетворяют уравнениям поля ньютоновской теории тяготения (гравитационные поля ньютоновского типа), и такие, которые им не удовлетворяют (гравитационные поля неньютоновского типа). В нерелятивистском приближении теории Эйнштейна целесообразно назвать гравитационные поля первого типа безвихревыми и гравитационные поля второго типа — вихревыми. Теория безвихревых гравитационных полей тождественна с ньютоновской теорией тяготения. Вихревое гравитационное поле характеризуется ньютоновским и векторным потенциалами, из которых первый удовлетворяет уравнению Пуассона, второй — уравнению Лапласа. В вихревом гравитационном поле не существует инерциальных систем отсчета в смысле ньютоновской механики.

1. Введение

Хорошо известно, что при $c \to \infty$ (по сравнению со скоростями движения материальных тел) механика специальной теории относительности переходит в ньютоновскую механику, причем релятивистские инерциальные системы отсчета переходят в инерциальные системы ньютоновской механики. Можно рассматривать также системы отсчета более общего типа, характеризуемые видом метрической формы [1]

$$ds^2 = c^2dt^2 - \gamma_{rs}d\xi^r d\xi^s, \tag{1.1}$$

где коэффициенты γ_{rs} при $c \to \infty$ имеют конечные и отличные от нуля предельные значения. Каждая точка $\xi^i = \text{const}$ движется относительно инерциальной системы прямолинейно и равномерно, т. е. так, как движется свободная материальная частица по инерции, но в общем случае различные точки движутся в различных направлениях с различными скоростями. Такие системы отсчета могут быть определены с помощью свободно движущихся материальных точек. При $c \to \infty$ они переходят в соответствующие нестатические системы отсчета ньютоновской механики, определяемые здесь аналогичным образом с помощью свободно движущихся материальных точек.

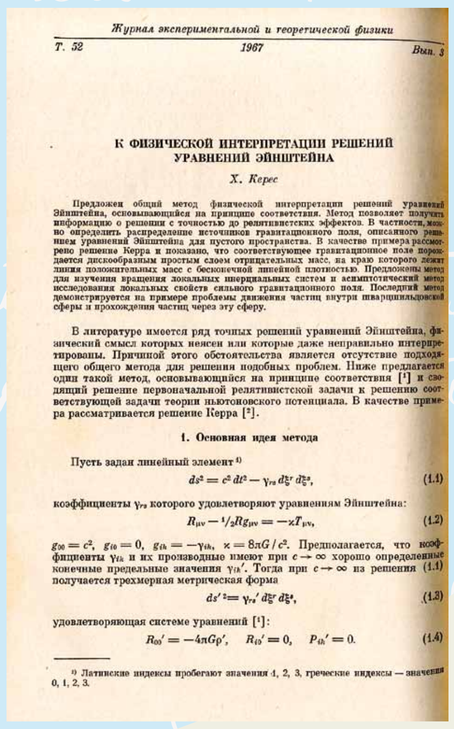
Эту же идею мы применили в общей теории относительности. Здесь нет инерциальных систем в смысле специальной теории относительности, но существуют системы отсчета типа (1.1). Мировые линии точек $\xi^i = \text{const}$ являются геодезическими, т. е. точки $\xi^i = \text{const}$ движутся так, как движутся свободно падающие частицы в данном гравитационном поле. Поэтому рассматриваемые системы отсчета могут быть определены с помощью свободно падающих материальных точек.

В ньютоновской теории гравитации можно сконструировать с помощью свободно падающих материальных точек системы отсчета совершенно аналогичным образом. Эти последние явно соответствуют рассмотренным выше релятивистским системам отсчета, и соответствие имеет тот же характер, что в специальной теории относительности. При предельном

[1] Латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, греческие индексы — значения 1, 2, 3.

7*

1965. a. näitas, et üldrelatiivsusteooriast mitterelativistlikul piiril saadud teooria sisaldab lisaks Newtoni gravitatsiooniteooria poolt kirjeldatud gravitatsiooniväljadele ka pöördelisi mitterelativistlikke gravitatsiooniväljU



Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 52 — 1967 — Вып. 3

К ФИЗИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

Х. Керес

Предложен общий метод физической интерпретации решений уравнений Эйнштейна, основывающийся на принципе соответствия. Метод позволяет получить информацию о решении с точностью до релятивистских эффектов. В частности, можно определить распределение источников гравитационного поля, описанного решением уравнений Эйнштейна для пустого пространства. В качестве примера рассмотрено решение Керра и показано, что соответствующее гравитационное поле порождается дискообразным простым слоем отрицательных масс, на краю которого лежит линия положительных масс с бесконечной линейной плотностью. Предложены метод для изучения вращения локальных инерциальных систем и асимптотический метод исследования локальных свойств сильного гравитационного поля. Последний метод демонстрируется на примере проблемы движения частиц внутри шварцшильдовской сферы и прохождения частиц через эту сферу.

В литературе имеется ряд точных решений уравнений Эйнштейна, физический смысл которых неясен или которые даже неправильно интерпретированы. Причиной этого обстоятельства является отсутствие подходящего общего метода для решения подобных проблем. Ниже предлагается один такой метод, основывающийся на принципе соответствия [1] и сводящий решение первоначальной релятивистской задачи к решению соответствующей задачи теории ньютоновского потенциала. В качестве примера рассматривается решение Керра [2].

1. Основная идея метода

Пусть задан линейный элемент [1]

$$ds^2 = c^2dt^2 - \gamma_{rs}d\xi^r d\xi^s, \tag{1.1}$$

коэффициенты γ_{rs} которого удовлетворяют уравнениям Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} - {}^1/_2 R g_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu}, \tag{1.2}$$

$g_{00} = c^2$, $g_{0k} = 0$, $g_{ik} = -\gamma_{ik}$, $\varkappa = 8\pi G/c^2$. Предполагается, что коэффициенты γ_{ik} и их производные имеют при $c \to \infty$ хорошо определенные конечные предельные значения γ_{ik}'. Тогда при $c \to \infty$ из решения (1.1) получается трехмерная метрическая форма

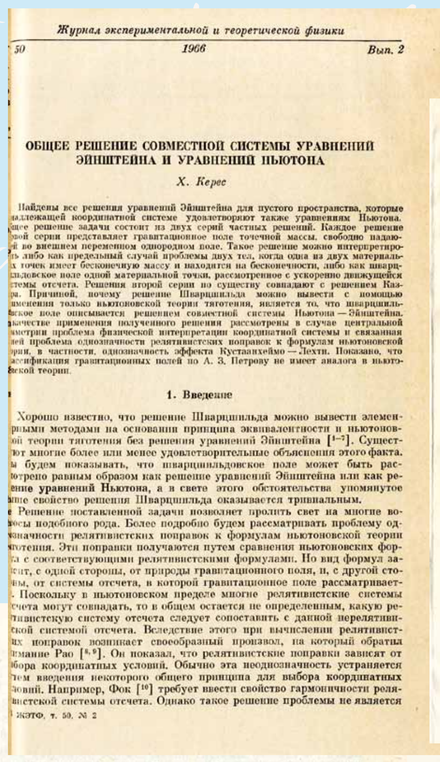
$$ds'^2 = \gamma_{rs}' d\xi^r d\xi^s, \tag{1.3}$$

удовлетворяющая системе уравнений [1]:

$$R_{00}' = -4\pi G\rho', \quad R_{i0}' = 0, \quad P_{ik}' = 0. \tag{1.4}$$

[1] Латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, греческие индексы — значения 0, 1, 2, 3.

1967. a., lähtudes vastavuse printsiibist, näitas Harald Keres, et Einsteini võrrandite Kerri lahendist mitterelativistlikul piiril saadud gravitatsiooniväljA allikaks on negatiivse massi mittehomogeense jaotusega ringikujuline ketas, mille äärel on positiivse lõpmata suure joontihedusega ühemõõtmeline materiaalne objekt



Журнал экспериментальной и теоретической физики

50 — 1966 — Вып. 2

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ СОВМЕСТНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА И УРАВНЕНИЙ НЬЮТОНА

Х. Керес

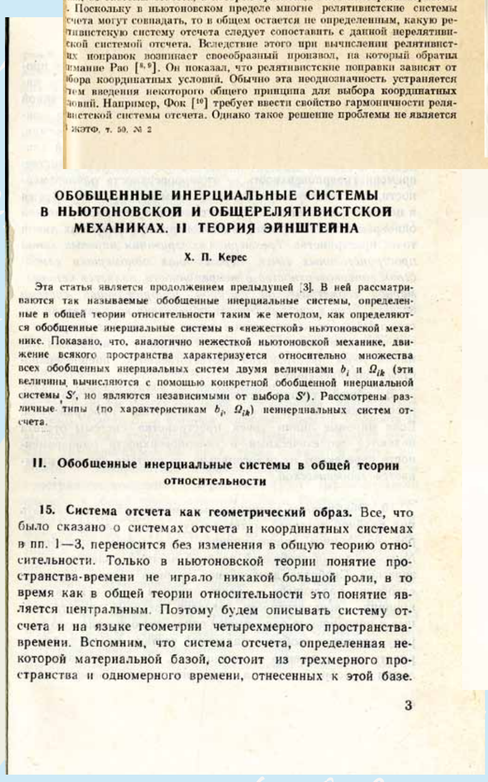
Найдены все решения уравнений Эйнштейна для пустого пространства, которые в галилеевой координатной системе удовлетворяют также уравнениям Ньютона. Общее решение задачи состоит из двух серий частных решений. Каждое решение первой серии представляет гравитационное поле точечной массы, свободно падающей во внешнем переменном однородном поле. Такое решение можно интерпретировать либо как предельный случай проблемы двух тел, когда одна из двух материальных точек имеет бесконечную массу и находится на бесконечности, либо как шварцшильдовское поле одной материальной точки, рассмотренное с ускоренно движущейся системы отсчета. Решения второй серии по существу совпадают с решением Казнера. Причиной, почему решение Шварцшильда можно вывести с помощью изменения только ньютоновской теории тяготения, является то, что шварцшильдовское поле описывается решением совместной системы Ньютона—Эйнштейна. В качестве применения полученного решения рассмотрены в случае центральной симметрии проблема физической интерпретации координатной системы и связанная с ней проблема однозначности релятивистских поправок к формулам ньютоновской теории, в частности, однозначность эффекта Кустаанхеймо—Лехти. Показано, что классификация гравитационных полей по А. З. Петрову не имеет аналога в ньютоновской теории.

1. Введение

Хорошо известно, что решение Шварцшильда можно вывести элементарными методами на основании принципа эквивалентности и ньютоновской теории тяготения без решения уравнений Эйнштейна [1–7]. Существуют многие более или менее удовлетворительные объяснения этого факта. Мы будем показывать, что шварцшильдовское поле может быть рассмотрено равным образом как решение уравнений Эйнштейна или как решение уравнений Ньютона, а в свете этого обстоятельства упомянутое выше свойство решения Шварцшильда оказывается тривиальным.

Решение поставленной задачи позволяет пролить свет на многие вопросы подобного рода. Более подробно будем рассматривать проблему однозначности релятивистских поправок к формулам ньютоновской теории тяготения. Эти поправки получаются путем сравнения ньютоновских формул с соответствующими релятивистскими формулами. Но вид формул зависит, с одной стороны, от природы гравитационного поля, и, с другой стороны, от системы отсчета, в которой гравитационное поле рассматривается. Поскольку в ньютоновском пределе многие релятивистские системы отсчета могут совпадать, то в общем остается не определенным, какую релятивистскую систему отсчета следует сопоставить с данной нерелятивистской системой отсчета. Вследствие этого при вычислении релятивистских поправок возникает своеобразный произвол, на который обратил внимание Рао [8, 9]. Он показал, что релятивистские поправки зависят от выбора координатных условий. Обычно эта неоднозначность устраняется путем введения некоторого общего принципа для выбора координатных условий. Например, Фок [10] требует ввести свойство гармоничности релятивистской системы отсчета. Однако такое решение проблемы не является

[1] ЖЭТФ, т. 50, № 2



ОБОБЩЕННЫЕ ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ В НЬЮТОНОВСКОЙ И ОБЩЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКАХ. II ТЕОРИЯ ЭЙНШТЕЙНА

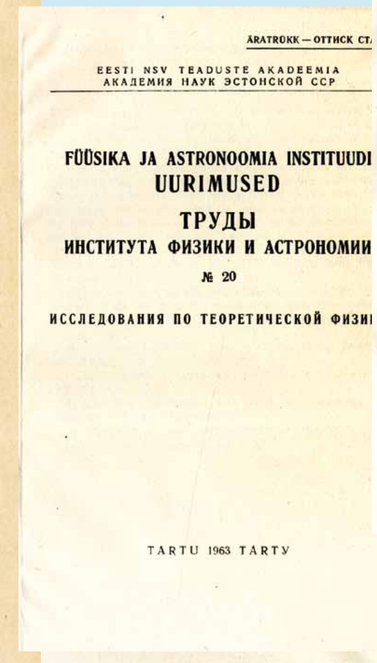
Х. П. Керес

Эта статья является продолжением предыдущей [3]. В ней рассматриваются так называемые обобщенные инерциальные системы, определенные в общей теории относительности таким же методом, как определяются обобщенные инерциальные системы в «нежесткой» ньютоновской механике. Показано, что, аналогично нежесткой ньютоновской механике, движение всякого пространства характеризуется относительно множества всех обобщенных инерциальных систем двумя величинами b_i и Ω_{ik} (эти величины вычисляются с помощью конкретной обобщенной инерциальной системы S', но являются независимыми от выбора S'). Рассмотрены различные типы (по характеристикам b_i, Ω_{ik}) неинерциальных систем отсчета.

II. Обобщенные инерциальные системы в общей теории относительности

15. Система отсчета как геометрический образ. Все, что было сказано о системах отсчета и координатных системах в пп. 1—3, переносится без изменения в общую теорию относительности. Только в ньютоновской теории понятие пространства-времени не играло никакой большой роли, в то время как в общей теории относительности это понятие является центральным. Поэтому будем описывать систему отсчета и на языке геометрии четырехмерного пространства-времени. Вспомним, что система отсчета, определенная некоторой материальной базой, состоит из трехмерного пространства и одномерного времени, отнесенных к этой базе.

3



ÄRATRÜKK — OTTISK CT

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA
АКАДЕМИЯ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР

FÜÜSIKA JA ASTRONOOMIA INSTITUUDI UURIMUSED

ТРУДЫ ИНСТИТУТА ФИЗИКИ И АСТРОНОМИИ

№ 20

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИ

TARTU 1963 ТАРТУ

ОБОБЩЕННЫЕ ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ В НЬЮТОНОВСКОЙ И ОБЩЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКАХ. I ТЕОРИЯ НЬЮТОНА

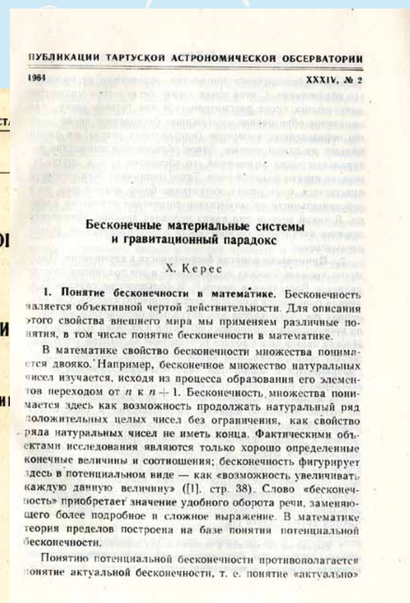
Х. П. Керес

С целью создать необходимую основу для сравнения механики общей теории относительности с ньютоновской механикой и вместе с тем ввести методы ньютоновской механики в механику общей теории относительности и объяснить некоторые трудности последней, ньютоновская механика рассматривается с той же степенью общности, как это свойственно общей теории относительности. Исключая из рассмотрения понятие жесткости тел, множество обычных инерциальных систем заменяется более объемистым множеством обобщенных инерциальных систем. Исследуются свойства обобщенных инерциальных систем и преобразования, связывающие обобщенные инерциальные системы между собой. Закон Ньютона записывается в форме, общей для всех обобщенных инерциальных систем.

Введение

В ньютоновской механике закон инерции занимает центральное место. Цель этой работы — изучить, каким образом закон инерции переносится в механику общей теории относительности и какую роль он в ней играет. Для этого прежде всего необходимо записать формулы ньютоновской механики в достаточно общем виде, чтобы стало возможным разумное сравнение с соответствующими формулами общей теории относительности. Одновременно исследуем структуру общерелятивистской механики и введем в общую теорию относительности методы ньютоновской механики.

92



ПУБЛИКАЦИИ ТАРТУСКОЙ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ

1964 — XXXIV, № 2

Бесконечные материальные системы и гравитационный парадокс

Х. Керес

1. Понятие бесконечности в математике. Бесконечность является объективной чертой действительности. Для описания этого свойства внешнего мира мы применяем различные понятия, в том числе понятие бесконечности в математике.

В математике свойство бесконечности множества понимается двояко. Например, бесконечное множество натуральных чисел изучается, исходя из процесса образования его элементов переходом от n к $n+1$. Бесконечность, множества понимается здесь как возможность продолжать натуральный ряд положительных целых чисел без ограничения, как свойство ряда натуральных чисел не иметь конца. Фактическими объектами исследования являются только хорошо определенные конечные величины и соотношения; бесконечность фигурирует здесь в потенциальном виде — как «возможность увеличивать каждую данную величину» ([1], стр. 38). Слово «бесконечность» приобретает значение удобного оборота речи, заменяющего более подробное и сложное выражение. В математике теория пределов построена на базе понятия потенциальной бесконечности.

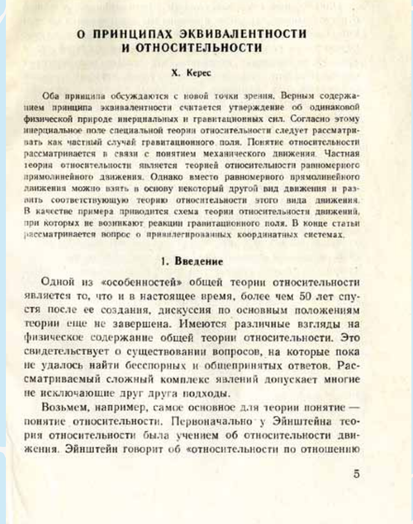
Понятию потенциальной бесконечности противополагается понятие актуальной бесконечности, т. е. понятие «актуально»

I Обобщенные инерциальные системы в ньютоновской механике

1. Система отсчета. Чтобы определить местонахождение события в пространстве и во времени, надо исходить из некоторой материальной системы, которую назовем *базой* для определения местонахождения и относительно которой рассматриваемое местонахождение только и имеет смысл. Определение пространственно-временного местонахождения события означает определение его местонахождения в пространстве и момента происхождения его во времени. В дальнейшем рассмотрим только базы, позволяющие определить трехмерное множество местонахождений в пространстве, или пространственных точек (занятых событиями или пустых), которое обладает свойством дифференцируемости [1], и одномерное множество моментов времени — также дифференцируемое. Упомянутые трехмерное множество пространственных точек и одномерное множество моментов времени называются *пространством* и *временем*, принадлежащими к данной базе. Пространство и время вместе образуют *систему отсчета*, определенную данной базой.

2. Координатная система. Физическое пространство, определенное данной материальной базой, можно отобразить на трехмерное числовое пространство. Действительные числа x^i из упорядоченной тройки (x^1, x^2, x^3), соответствующей рассматриваемой пространственной точке P, называются *координатами* точки P. Множество координатных троек, взятое вместе со способом присвоения координат точкам, т. е. способом отображения физического пространства на числовое, определяет конкретную *координатную систему* в физическом пространстве. Свойство дифференцируемости физического пространства предполагает, что 1) каждая точка P имеет окрестность, гомеоморфную внутренности эвклидового шара; 2) существуют такие координатные системы, что координаты точки P, определенные в одной координатной системе, являются дифференцируемыми функциями с отличным от нуля якобианом от координат точки P, определенных в другой координатной системе.

93



О ПРИНЦИПАХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Х. Керес

Оба принципа обсуждаются с новой точки зрения. Верным содержанием принципа эквивалентности считается утверждение об одинаковой физической природе инерциальных и гравитационных сил. Согласно этому инерциальное поле специальной теории относительности следует рассматривать как частный случай гравитационного поля. Понятие относительности рассматривается в связи с понятием механического движения. Частная теория относительности является теорией относительности равномерного прямолинейного движения. Однако вместо равномерного прямолинейного движения можно взять в основу некоторый другой вид движения и развить соответствующую теорию относительности этого вида движения. В качестве примера приводится схема теории относительности движений, при которых не возникают реакции гравитационного поля. В конце статьи рассматривается вопрос о привилегированных координатных системах.

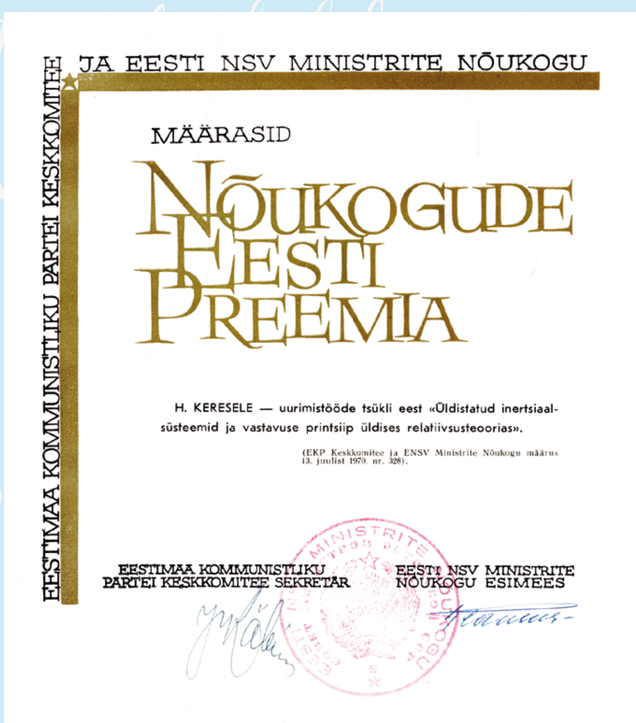
1. Введение

Одной из «особенностей» общей теории относительности является то, что и в настоящее время, более чем 50 лет спустя после ее создания, дискуссия по основным положениям теории еще не завершена. Имеются различные взгляды на физическое содержание общей теории относительности. Это свидетельствует о существовании вопросов, на которые пока не удалось найти бесспорных и общепринятых ответов. Рассматриваемый сложный комплекс явлений допускает многие не исключающие друг друга подходы.

Возьмем, например, самое основное для теории понятие — понятие относительности. Первоначально у Эйнштейна теория относительности была учением об относительности движения. Эйнштейн говорит об «относительности по отношению

5

1970 — 1960ndatel aastatel kirjutatud uurimistööde tsükli eest omistati Harald Keresele 1970. aastal Nõukogude Eesti preemia



EESTIMAA KOMMUNISTLIKU PARTEI KESKKOMITEE JA EESTI NSV MINISTRITE NÕUKOGU

MÄÄRASID

NÕUKOGUDE EESTI PREEMIA

H. KERESELE — uurimistööde tsükli eest «Üldistatud inertsiaalsüsteemid ja vastavuse printsiip üldises relatiivsusteoorias».

(EKP Keskkomitee ja ENSV Ministrite Nõukogu määrus 13. juulist 1970, nr. 328).

EESTIMAA KOMMUNISTLIKU PARTEI KESKKOMITEE SEKRETÄR

EESTI NSV MINISTRITE NÕUKOGU ESIMEES

See, mis viib tõele ligemale, on ilus.

Harald Keres, 1968